Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Tercera fecha. 14 de julio de 2015.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Probar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0.$$

(b) Determinar si la ecuación $(x^2 + y^2)\cos(2\operatorname{arctg}(y/x)) = cte$ describre las líneas de corriente de un fluido ideal. En caso afirmativo, calcular el correspondiente potencial complejo.

Ejercicio 2. Sea $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$ el desarrollo trigonométrico de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de $f(x) = \begin{cases} 4\operatorname{sen} x & -\pi \leqslant x < -\pi/2 \\ 5 & x = -\pi/2 \\ -\dfrac{4}{\pi} x^2 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -2x & \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

(a) Explicar qué significa que el desarrollo trigonométrico de Fourier converge en media cuadrática a $f(x)$ en $[-\pi, \pi]$. ¿Se verifica en este caso? Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

(b) Si $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, obtener el valor de:

i) $S(x)$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$, ii) $S(3/2\pi)$, iii) $S(5/2\pi)$, iv) $S(2k\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.

(a) Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1 + x^2}\, dx$ para cualquier $w \in \mathbb{R}$. Obtener $\mathcal{F}[\frac{1}{1+x^2}](w)$.

(b) Resolver la ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \dfrac{1}{1 + x^2} & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

y describir un problema físico que pueda ser modelado por ésta.

Ejercicio 4.

(a) Probar que la convolución de dos funciones de orden exponencial es de orden exponencial.

(b) Dadas $f(t) = H(t)$ y $g(t) = H(t-1)$, siendo $H(t)$ la función de Heaviside, resolver:

$$\begin{aligned} &y''(t) + 4\,y'(t) + 4\,y(t) = (f * g)(t) \quad t > 0 \\ &y(0) = y'(0) = 0 \end{aligned}$$